Espaços Vetoriais Reais

Rolando Gárciga Otero

Álgebra Linear
Instituto de Economia

Agosto de 2021

Considere um conjunto não vazio V munido de duas operações binárias, soma $(+)$ e multiplicação por escalares reais $(\cdot)$ em que para cada $x,\ y,\ z \in V$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tem-se $x+y \in V$, $\alpha \cdot x \in V$ e

1. $x+y = y+x$ (Comutativa),
2. $x+(y+z) = (x+y)+z$ (Associativa),
3. Existe $O \in V$ tal que $x+O = O+x = x$, $\forall x \in V$ ($\exists$ neutro),
4. $\forall x \in V$ existe inverso aditivo, denotado $-x$, tal que $x+(-x) = O$,
5. $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta)\cdot x$,
6. $1 \cdot x = x$,
7. $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ e $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (propriedades distributivas).

A estrutura $V,\ +,\ \cdot$ é denominada espaço vetorial (real[1]) e denotada simplesmente V quando não há dúvida sobre quais as operações consideradas.

Cada elemento de V é chamado vetor.

[1] Na operação de multiplicação por escalar pode-se trabalhar com outros conjunto numéricos tão bem comportados na soma e multiplicação quanto $\mathbb{R}$: os chamados corpos numéricos. Tal vez o mais usado, fora $\mathbb{R}$, seja o conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$. Nesse caso, fala-se em espaço vetorial complexo e denota-se $V(\mathbb{C}),+,\cdot$. Em geral, se o corpo for denotado por $\mathbb{K}$ e $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ escreve-se $V(\mathbb{K}),+,\cdot$ para expressar que V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

Exemplo 1

$\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial real; ou seja, $\mathbb{R}^n(\mathbb{R}), +, \cdot$, em que

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),$$

$\forall x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial.

De fato, as operações estão bem definidas e verificam todas as propriedades desejadas da soma, [3, Prop. 1.3] , e da multiplicação por escalar real, [3, Prop. 1.6].

Exemplo 2

$M(m,n)$ é um espaço vetorial real na soma e multiplicação (por números reais) usuais.

Propriedades descritas na [3, Prop. 2.9].

Exemplo 3

Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$ e $F(X,\mathbb{R})$, o conjunto de todas as funções reais definidas em X. Fixadas duas funções $f,g \in F(X,\mathbb{R})$ defina a função soma $f+g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ da forma usual:

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \qquad \forall x \in X.$$

Analogamente, fixada a constante real c e a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ defina a multiplicação de f pelo escalar c como sendo a função $cf : X \longrightarrow \mathbb{R}$ com a regra

$$(cf)(x) := c \cdot f(x), \qquad \forall x \in X.$$

Então, $F(X,\mathbb{R})$ é um espaço vetorial nas operações aqui definidas.

De fato, dadas $f,g,h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $c,d \in \mathbb{R}$ tem-se, trivialmente,

- $f+g = g+f$, $(f+g)+h = f+(g+h)$, $c(df) = (cd)f$, $1f = f$, $(c+d)f = cf+df$, $c(f+g) = cf+cg$,
- o neutro é a função constante e igual a zero
- e o inverso aditivo de f é a função $(-1)\cdot f$ que troca o sinal de f.

O conjunto de propriedades da soma e da multiplicação por escalar num espaço vetorial determinam algumas características comuns a qualquer espaço:

- O elemento neutro é único em cada espaço vetorial.

  De fato, se tivermos dois neutros O_1 e O_2 em V então, pela definição de neutro e propriedade comutativa ter-se-ia

$$O_1 = O_1 + O_2 = O_2 + O_1 = O_2.$$

- Vale a regra do cancelamento para a soma; ou seja, dados u, v, w no espaço vetorial $V, +, \cdot$ tem-se

$$w + u = w + v \quad \Longrightarrow \quad u = v.$$

  Basta observar que, supondo $w + u = w + v$,

$$\begin{aligned} u &= u + O = u + (w - w) = (u + w) - w = \underbrace{(w + u)}_{w+v} - w = (w + v) - w \\ &= (v + w) - w = v + (w - w) = v + O = v. \end{aligned}$$

- O neutro de V, O_V, coincide com $0 \cdot v$, qualquer que seja $v \in V$:

$$v + 0 \cdot v = (1 + 0) \cdot v = 1v = v = v + O_V \implies 0 \cdot v = O_V.$$

- $\alpha O_V = O_V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

  De fato, se $w = \alpha O_V$ então

$$\cancel{w} + \alpha O_V = \alpha O_V + \alpha O_V = \alpha(O_V + O_V) = \alpha O_V = \cancel{w} + O_V \implies \alpha O_V = O_V.$$

- Se $\alpha \neq 0$ e $v \neq O_V$ então $\alpha \cdot v \neq O_V$.

  Isto pode ser mostrado por contradição:

$$v = 1v = (\alpha \cdot \alpha^{-1})v = \alpha^{-1} \underbrace{(\alpha v)}_{O_V} = O_V.$$

- O inverso aditivo de v coincide com $(-1) \cdot v$:

$$v + (-1) \cdot v = 1v + (-1) \cdot v = (1-1)v = 0v = O_V = v + (-v) \Rightarrow (-1) \cdot v = -v.$$

Seja $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ um espaço vetorial.

Definição 1

Um subconjunto não vazio $F \subseteq V$ é dito subespaço vetorial de $V(\mathbb{K}),\ +,\ \cdot$, quando

$$\alpha u + \beta v \in F, \qquad \forall u,\ v \in F \quad \text{e} \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}.$$

Ou seja, F é subespaço vetorial de V quando as combinações lineares, $\alpha u + \beta v$, de elementos de F, obtidas com o uso das operações algébricas de V, ficam dentro do subconjunto F.

Proposition 1

Seja $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ um espaço vetorial e suponha que $F \subseteq V$, $F \neq \emptyset$. Então, F é um subespaço vetorial de V se, e somente se,

$$u + v \in F, \quad \forall u,\ v \in F \quad \text{e} \quad \alpha u \in F, \quad \forall u \in F, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Dem. $\Rightarrow$: basta fazer $\alpha = 1 = \beta$ para mostrar que é fechado para a soma e, $\beta = 0$ para mostrar que é fechado para a multiplicação por escalar.

Dem. $\Leftarrow$: $\alpha u + \beta v = \hat{u} + \hat{v}$, $\hat{u} = \alpha u$ e $\hat{v} = \beta v$, que são elementos de F quando $u,\ v \in F$ pois F é fechado para a multiplicação por escalar.

Os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}$

Exemplo 4

Os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}$ são o próprio $\mathbb{R}$ e o conjunto $\{0\}$.

De fato, se F for subespaço vetorial de $\mathbb{R}$ então $F \subseteq \mathbb{R}$ e $F \neq \emptyset$; assim,

- se F contém um elemento diferente de zero então também contém todos seus múltiplos reais (pois precisa ser fechado para a multiplicação por escalares reais); ou seja, contém todo $\mathbb{R}$ e assim $\mathbb{R} \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$ concluindo que nesse caso $F = \mathbb{R}$.

- No caso excludente, F não contém nenhum elemento diferente de zero; ou seja, $F = \{0\}$. Obviamente, neste caso $\alpha 0 + \beta 0 = 0 \in F$ e, consequentemente, $\{0\}$ também é um subespaço vetorial.

Observação 1

V e $\{O_V\}$ são, sempre, subespaços vetoriais de $V, +, \cdot$; ditos, triviais.

Os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$

- Os triviais: $\{(0,0)\}$ e $\mathbb{R}^2$;
- e as retas que contêm $(0,0)$.

De fato, se F é um subespaço e contém $v \neq (0,0)$ então também contém $\{t \cdot v;\ t \in \mathbb{R}\}$ que corresponde à reta que passa por $(0,0)$ com vetor diretor v.

Claro, se for o caso de F conter um outro vetor u não co-linear a v então F seria todo o plano $\{tv + su;\ t, s \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

Assim, o gráfico da função $y = x$, $x \in \mathbb{R}$, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ pois é uma reta contendo a origem; porém, a simples translação $y = x + 1$, que continua representando uma reta (paralela inclusive), deixa de ter seu gráfico atendendo às características de um subespaço vetorial pois se $G = \{(x, x+1),\ x \in \mathbb{R}\}$ então $(0,1) \in G$ enquanto $2 \cdot (0,1) = (0,2) \notin G$ (Figura 1).

Observação 2

É necessário que o neutro de V esteja em F para que F possa ser subespaço vetorial de V (vide a definição e faça $\alpha = 0$).

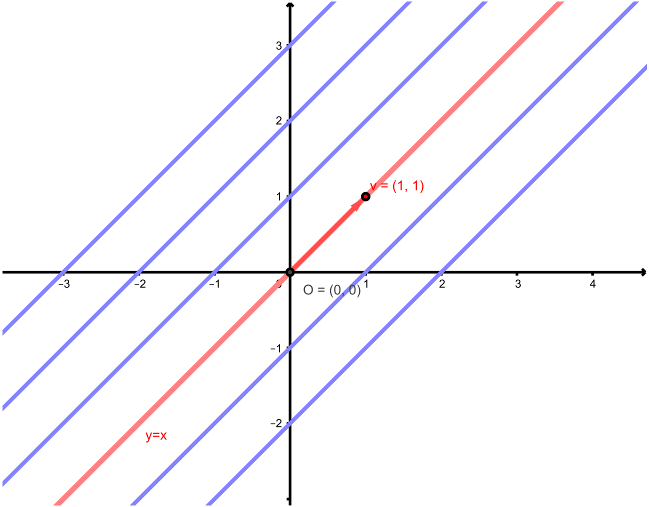

Figura: Gráfico de $y = x$ e translações.

Variedade Afim

Mesmo o gráfico G da reta $y = x + 1$ não sendo um subespaço vetorial, ele é paralelo a um (no caso, ao subespaço $F = \{(x,x);\ x \in \mathbb{R}\}$; diz-se, então que é uma variedade afim.

Definição 2

Seja $\emptyset \neq G \subseteq V$, $V, +, \cdot$ espaço vetorial. Diz-se que G é uma variedade afim se existe $w \in G$ tal que $F = G - w := \{u - w;\ u \in F\}$ é um subespaço vetorial de V. Nesse caso, F é chamado de subespaço paralelo de G (Figuras 1 e 2).

Obviamente, todo subespaço vetorial é uma variedade afim; porém, nem toda variedade afim é um subespaço vetorial.

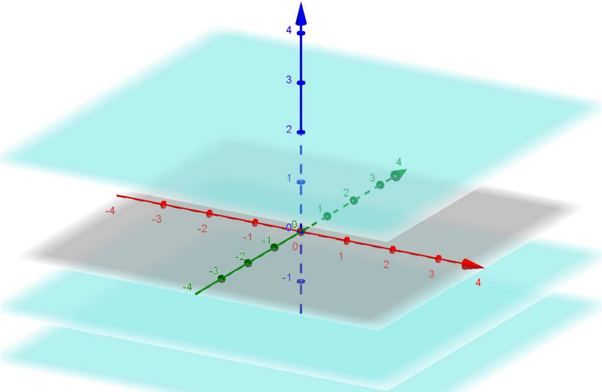

Figura: Plano $z = 0$ e translações afins

Observação 3

O fato do neutro pertencer ao conjunto $F \subseteq V$ não torna F, automaticamente, um subespaço.

Por exemplo, o gráfico de $y = x^2$, $H = \{(x, x^2);\ x \in \mathbb{R}\}$, Figura 3, contém $(0,0)$ e não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ (nem uma variedade afim[2]).

$$u = (1,1),\ v = (0,0) \in H,\ \alpha = 2 \in \mathbb{R}; \quad \text{porém} \quad 2 \cdot (1,1) + (1-2) \cdot (0,0) = (2,2) \notin H.$$

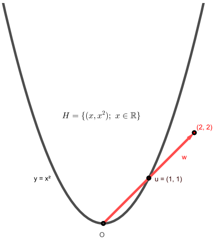

Figura: Gráfico de $y = x^2$

[2] Pode ser provado que $G \subseteq V$ ($G \neq \emptyset$ e $V, +, \cdot$ espaço vetorial) é uma variedade afim sse

$$\alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v \in G, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad u,\ v \in G.$$

Exemplo 5

O conjunto das matrizes simétricas de ordem n é subespaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n. De fato, a soma de simétricas é simétrica e multiplicando por uma constante uma matriz simétrica obtemos ainda uma simétrica.

Exemplo 6 (Classes de diferenciabilidade)

Seja $\mathscr{C}^k(X)$ *o conjunto das funções* $f \in F(X,\mathbb{R})$ *que possuem derivada de ordem* k, $f^{(k)} : X \longrightarrow \mathbb{R}$, *contínua. No caso de* $k=0$, $\mathscr{C}^0(X)$ *representa o conjunto das funções contínuas em* X. *Então,* $\mathscr{C}^0(X)$ *é um subespaço vetorial de* $F(X,\mathbb{R})$. *De fato,* $\mathscr{C}^0(X) \subseteq F(X,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^0(X) \neq \emptyset$ (*por exemplo, a função constante e igual a zero em* X *faz parte desse conjunto pois é contínua*) e a soma de contínuas é contínua e o produto de uma função contínua por uma constante também é uma função contínua. *Analogamente,* $\mathscr{C}^{k+1}(X)$ *é subespaço vetorial de* $\mathscr{C}^k(X)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Exemplo 7

O conjunto dos polinômios de coeficientes reais e grau menor ou igual a dois,

$$\mathscr{P}_{\leq 2} = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Interseção

Proposition 2

Seja $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ um espaço vetorial. Se F_1 e F_2 são subespaços vetoriais de V então $F_1 \cap F_2$ é subespaço vetorial de V (Figura 4).

Sejam F_1 e F_2 são subespaços vetoriais de V. Então

$$F_1 \cap F_2 \subseteq F_1 \subseteq V, \quad O_V \in F_1, \quad O_V \in F_2 \Rightarrow \quad O_V \in F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$$

e supondo $u, v \in F_1 \cap F_2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ defina $w := \alpha u + \beta v$. Queremos provar que $w \in F_1 \cap F_2$; ou seja, que $w \in F_1$ e $w \in F_2$:

u e v são elementos de F_1, e F_1 é um subespaço vetorial de V e assim fechado pelas combinações lineares dos seus elementos, então $w \in F_1$.

Analogamente, como u e v também são elementos de F_2, $w \in F_2$.

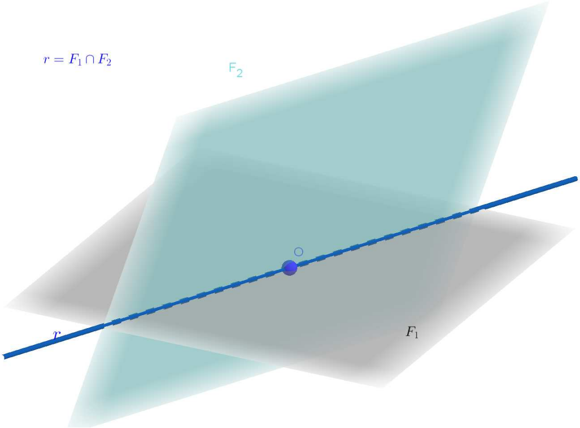

Figura: Subespaço interseção.

Soma

Proposition 3

Seja $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ um espaço vetorial. Se F_1 e F_2 são subespaços vetoriais de V então $F_1 + F_2 = \{v_1 + v_2;\ v_i \in F_i,\ i = 1, 2\}$ é subespaço vetorial de V (Figuras 5 e 6).

Suponha que $F = F_1 + F_2$. Então,

- $F \subseteq V$ pois cada elemento v de F é da forma $v_1 + v_2$ com $v_1 \in F_1 \subsetneq V$ e $v_2 \in F_2 \subsetneq V$ e em V a soma é fechada; ou seja, $v_1 + v_2 \in V$.
- Além disso, $F \neq \emptyset$ pois $O_V \in F_1$, $O_V \in F_2$ e $O_V = O_V + O_V \in F_1 + F_2 = F$.
- Basta provar que F é fechado pelas combinações lineares dos seus elementos: sejam $u = u_1 + u_2$ e $v = v_1 + v_2$, $u_i,\ v_i \in F_i,\ i = 1, 2$, elementos de F e α e β escalares.

  Então, $u_1,\ v_1 \in F_1$ e, consequentemente, $w_1 = \alpha u_1 + \beta v_1 \in F_1$; analogamente, $u_2,\ v_2 \in F_2$ e, assim, $w_2 = \alpha u_2 + \beta v_2 \in F_2$.Logo,

  $$w = \alpha u + \beta v = \alpha(u_1 + u_2) + \beta(v_1 + v_2) = (\alpha u_1 + \beta v_1) + (\alpha u_2 + \beta v_2) = w_1 + w_2 \in F_1 + F_2 = F.$$

$\square$

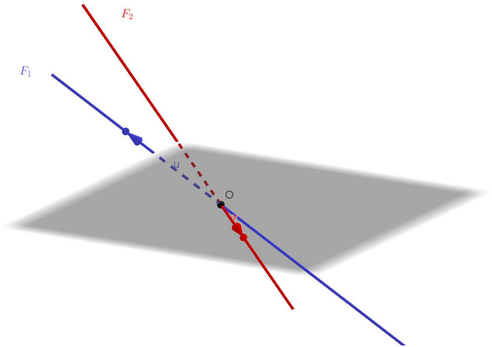

Figura: Subespaços F_1 e F_2

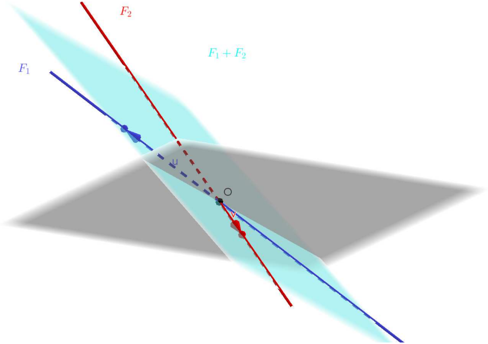

Figura: Subespaço $F_1 + F_2$

Exemplo 8

Seja $F_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}$ *e* $F_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\}$. *Então,* F_1 *e* F_2 *são subespaços vetoriais de* $\mathbb{R}^2$ *(as retas representativas dos eixos coordenados) e*

$$F_1 \cap F_2 = \{(0,0)\} \quad \text{e} \quad F_1 + F_2 = \{(x,0) + (0,y);\ x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x,y);\ x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Quando os subespaços vetoriais F_1 e F_2, do espaço vetorial V, verificam $F_1 \cap F_2 = \{O_V\}$ e $F_1 + F_2 = V$, diz-se que V é soma direta desses subespaços e escreve-se

$$V = F_1 \oplus F_2.$$

No Exemplo acima, 8,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 9

Considere os planos $\pi_1 = \{(x,y,0);\ x,y \in \mathbb{R}\}$ *e* $\pi_2 = \{(0,y,z);\ y,z \in \mathbb{R}\}$ *de* $\mathbb{R}^3$. *Então,* π_1 *e* π_2 *são subespaços de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\pi_1 + \pi_2 = \mathbb{R}^3$*; porém, a soma não direta visto que*

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \{(0,y,0);\ y \in \mathbb{R}\} \neq \{(0,0,0)\}.$$

Subespaço gerado via combinações lineares

Proposition 4

Seja $V(\mathbb{K}), +, \cdot$ um espaço vetorial. Se $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ então o conjunto $\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i;\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n\right\}$ é um subespaço vetorial de V.

Demo: Obviamente, O_V é um elemento de $E = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i;\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n\right\}$ e $E \subseteq V$.

Fixe então dois escalares a, $b \in \mathbb{K}$ e dois elementos quaisquer de E, digamos vetores u e v em que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \quad \text{e} \quad v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n, \qquad \alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n.$$

Então,

$$a \cdot u + b \cdot v = a \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + b \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(a\alpha_i + b\beta_i)}_{\gamma_i \in \mathbb{K}} v_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_i \in E.$$

$\square$

O conjunto $\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i;\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n \right\}$ é chamado de subespaço vetorial gerado pelos vetores v_i, $i = 1, \ldots, n$, e representado por

$$vet\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Ele é formado por todas as combinações lineares possíveis dos vetores $v_1, \ldots,\ v_n$.

Ele é o menor subespaço vetorial de V contendo todos os vetores v_1, $v_2, \ldots, v_n$ (e consequentemente, todas as retas geradas por esses vetores, e todos os planos, etc.):

$$vet\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \bigcap_{F \supseteq C} F; \qquad F \text{ subespaço de } V, \quad C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

Se $V = \mathbb{R}^3$ então

- $Vet\{(0,0,0)\} = \{(0,0,0)\}$;
- $vet\{v_1\}$ é a reta que passa pela origem com vetor diretor $v_1 \neq (0,0,0)$;
- se v_1 e v_2 são não nulos e não estão sobre a mesma reta então $vet\{v_1, v_2\}$ é o plano gerado pelas direções v_1 e v_2 contendo a origem;
- e se v_1, v_2 e v_3 não são co-planares então $vet\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$

No Exemplo 8 tem-se

$$F_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\} = \{x \cdot (1,0) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\} = Vet\{(1,0)\} \qquad \text{(eixo x)}$$

$$F_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\} = \{y \cdot (0,1) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\} = Vet\{(0,1)\} \qquad \text{(eixo y)}$$

e

$$\mathbb{R}^2 = Vet\{(1,0),\ (0,1)\}.$$

No Exemplo 9 tem-se

$$\text{plano z=0}: \quad \pi_1 = \{(x,y,0);\ x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x,0,0) + (0,y,0);\ x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,0,0) + y(0,1,0);\ x \in \mathbb{R}\} = Vet\{(1,0,0),\ (0,1,0)\}.$$

Analogamente,

$$\text{plano x=0}: \quad \pi_2 = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y,z \in \mathbb{R}\} = \{(0,y,0) + (0,0,z);\ y,z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{y(0,1,0) + z(0,0,1);\ y,z \in \mathbb{R}\} = Vet\{(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Enquanto que

$$\mathbb{R}^3 = Vet\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}.$$

Exemplo 10

Seja $V = M(2,2)$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Determine* $Vet\{A,\ B,\ C\}$.

$$\begin{aligned} Vet\{A,\ B,\ C\} &= \{a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C,\ a,b,c\in\mathbb{R}\} \\ &= \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ a,b,c\in\mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},\ a,b,c\in\mathbb{R} \right\} = S_{2\times 2} \quad \text{(simétricas).} \end{aligned}$$

Exemplo 11

Sejam $V = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, $f,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 1$ *e* $g(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Determine* $Vet\{f,\ g\}$.

Seguindo a definição,

$$Vet\{f,\ g\} = \{\underbrace{\alpha_1\cdot f + \alpha_2\cdot g}_{h};\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\} \text{ em que } h(x) = \alpha_1\cdot f(x) + \alpha_2\cdot g(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \quad Vet\{f,\ g\} = \{h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};\ h(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x, \forall x\in\mathbb{R}, \quad \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\} = \mathscr{P}_{\leq 1} \quad \text{(afins).}$$

□

Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ do espaço vetorial $(V(\mathbb{K}), +, \cdot)$ são ditos <u>linearmente independentes</u> (ou LI) quando a única combinação linear $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$; $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, que coincide com o vetor nulo é a trivial, ou seja, a que possui todos os escalares $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Quando um sistema de vetores não for linearmente independente dize-se que são <u>linearmente dependentes</u> (ou LD).

Observação 4

Um único vetor $v_1 \in V$ é LI se e somente se for não nulo.

De fato, se $\alpha_1 v_1 = O_V$ com $\alpha_1 \neq 0$ então $v_1 = \alpha_1^{-1} O_V = O_V$; ou seja, v_1 é LD se, e somente se, $v_1 = O_V$.

Observação 5

Dois vetores do plano $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes se estão sobre a mesma reta, ou seja, um é múltiplo escalar do outro (co-lineares).

Digamos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = O$, com $\alpha_1 \neq 0$. Então,

$$v_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} v_2 = t \cdot v_2, \quad \text{com} \quad t = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \in \mathbb{K}.$$

Por outro lado, se $v_1 = t v_2$ então $1 \cdot v_1 + (-t) \cdot v_2 = O$ é uma combinação linear não trivial que gera o neutro.

Observação 6

Três vetores de $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes se e somente se pertencem a um mesmo plano (co-planares), ou seja, um deles é combinação linear dos outros dois.

Digamos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = O$, com $\alpha_1 \neq 0$. Então,

$$v_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + \frac{-\alpha_3}{\alpha_1} v_3 = t \cdot v_2 + s v_3, \quad \text{com} \quad t = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1},\ s = \frac{-\alpha_3}{\alpha_1} \in \mathbb{K}.$$

Por outro lado, se $v_1 = t v_2 + s v_3$ então $1 \cdot v_1 + (-t) \cdot v_2 + (-s) v_3 = O$ é uma combinação linear não trivial que gera o neutro.

Teorema 1

O sistema de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ do espaço vetorial V é linearmente dependente se, e somente se, um deles for combinação dos restantes, i.e.,

$$\exists j \in \{1, \ldots, n\}; \quad v_j \in Vet\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\}.$$

Demostração: basta generalizar o argumento acima

$$v_j = \frac{-\alpha_1}{\alpha_j} v_1 + \cdots + \frac{-\alpha_{j-1}}{\alpha_j} v_{j-1} + \frac{-\alpha_{j+1}}{\alpha_j} v_{j+1} + \cdots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_j} v_n.$$

Exemplo 12

$(1,-1)$ e $(2,-2)$ são linearmente dependentes. De fato, $(2,-2) = 2\cdot(1,-1)$.

Exemplo 13

$(1,0)$ e $(0,1)$ são linearmente independentes: $(1,0) \neq t(0,1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 14

Determine se os vetores a seguir são ou não LI: $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(2,0,-2)$.

Solução 1 (via posto) Seja A a matriz que possui ditos vetores por linhas. Então,

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2+2+0-0-0-0 = 0;$$

logo, o posto de A não é máximo, ou seja, uma linha de A decorre das outras via soma e/ou multiplicação por escalar (que são as operações elementares do processo de eliminação de Gauss usado para calcular o posto da matriz); isto é, uma linha de A é combinação linear das restantes. Desse modo, os vetores são LD.

Solução via definição

Sobre a dependência/independência linear de $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(2,0,-2)$:

Considere a equação vetorial

$$x(1,1,0)+y(0,1,1)+z(2,0,-2)=(0,0,0) \Leftrightarrow (x,x,0)+(0,y,y)+(2z,0,-2z)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (x+2z,x+y,y-2z)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ x+y=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2z,\ y=2z,\ z\in\mathbb{R}.$$

Em particular, $x=-2$, $y=2$, $z=1$ é uma escolha não trivial para a combinação linear que gera o neutro de $\mathbb{R}^3$ concluindo que os vetores são LD.

Vale observar, na solução acima, que o sistema

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ x+y=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

é um sistema de equações lineares homogêneo em que a matriz de coeficientes é a transposta da matriz A da primeira solução, ou seja, do mesmo posto.

Dados $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ pode-se montar a matriz $A_{m\times n}$ que possui ditos vetores por linhas e, mesmo que não seja quadrada, calculando o posto podemos determinar se os vetores são LI ($posto = m$) ou LD ($posto < m$).

Questão 1 (Tomado da Anpec 2005 Q2-(3))

Os vetores $v_1 = (1, -2, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0, 1)$ e $v_3 = (1, 0, 1, 0)$ são linearmente dependentes?

São L.I. pois o posto da matriz associada (com ditos vetores nas sua linhas) é 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(-2-1) \neq 0.$$

Ou também

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 15

Seja $V = M(2,2)$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Determine se o sistema vetores, no caso matrizes,* $\{A,\ B,\ C\}$ *é LI ou LD.*

Sejam $a,\ b,\ c$ constantes reais (escalares) tais que

$$a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = O_v$$

ou seja,

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = b = c = 0 \quad \text{(LI).}$$

□

Exemplo 16

Seja $V = \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ com λ_1 e λ_2 constantes reais fixadas. Determine se os vetores y_1 e y_2, no caso funções, são ou não linearmente independentes.

Precisamos estudar a equação $\alpha y_1 + \beta y_2 = O_v$, com α e β escalares reais a determinar:

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0, & x = 0 \\ \alpha e^{\lambda_1} + \beta e^{\lambda_2} = 0, & x = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha = -\beta \wedge \alpha e^{\lambda_1} = \alpha e^{\lambda_2}$$

- ou $\lambda_1 = \lambda_2$, caso em que α pode ser escolhido (livremente) diferente de zero: L.D.
- ou $\lambda_1 \neq \lambda_2$, caso em que $\alpha = 0$ e $\beta = 0$: L.I.

□

Aplicação: Wronskiano

Note que

$$\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)=0, \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \quad \alpha y_1'(x)+\beta y_2'(x)=0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

pois y_1 e y_2 são funções deriváveis.

Assim, para qualquer $x\in\mathbb{R}$ fixado, α e β são as soluções do sistema de equações lineares homogêneo

$$\begin{cases} y_1(x)\alpha+y_2(x)\beta=0 \\ y_1'(x)\alpha+y_2'(x)\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que é determinado (única solução $\alpha=0=\beta$ - independência linear) sse o determinante da matriz de coeficientes for diferente de zero.

$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$ é conhecida como <u>matriz de Wronski</u> associada às funções y_1 e y_2; e, seu determinante, como <u>Wronskiano</u> (consulte, por exemplo, [1]):

$$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x).$$

Voltando ao exemplo anterior:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \quad \Rightarrow \quad y_1'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \quad \text{e} \quad y_2'(x) = \lambda_2 e^{\lambda_2 x}.$$

$$\begin{aligned}
W(y_1,y_2)(x) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x}\lambda_2 e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \\
&= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \\
&\Rightarrow \\
W(y_1,y_2)(x) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 \qquad (y_1 \quad \text{e} \quad y_2 \quad \text{são l.d.}) \\
W(y_1,y_2)(x) &\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad (y_1 \quad \text{e} \quad y_2 \quad \text{são l.i.})
\end{aligned}$$

- Boyce, W.E. e DiPrima, R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC (2006).
- Boldrini, J.L. *Álgebra Linear*, HARBRA (1980).
- Gárciga Otero, R. *Álgebra Linear.* Material em pdf.
- Lages Lima, E. *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitária (prêmio Jabuti), IMPA (2000).
- Lages Lima, E. *Curso de Análise. V2.* Terceira edição, IMPA (1989).
- Murdoch, D.C. *Álgebra Linear*, LTC (1972).
- Simon, C. and Blume, L. *Mathematics for Economists*, Norton (1994).